Mathematik für Systembiologie und Bioinformatik

Vorlesung Prof. Dr. Thomas Filk

Übungen Dr. Tim Maiwald, Christian Tönsing

Aufgabenzettel Nr. 2

Abgabe bis 7.11.2010, 10:00 Uhr in den Übungen

Hausaufgabe 1: Stetigkeit und Differenzierbarkeit (5 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differnzierbarkeit. An welchen Stellen oder Bereichen sind Stetigkeit oder Differnzierbarkeit nicht mehr gegeben? Was muss abgeändert werden, damit es sich um Funktionen im Sinne der Definition handelt? Geben Sie, falls möglich, die erste Ableitung an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion in einem sinnvollen Ausschnitt.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$, $a \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$

Hausaufgabe 2: Taylorentwicklung (5 Punkte)

Die Taylorentwicklung ist ein wichtiges Hilfsmittel. Sie erlaubt, eine Funktion f in der Nähe eines x-Wertes x_0 durch ein Polynom zu approximieren. Sei f bei $x = x_0$ n mal differenzierbar und $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung von f bei $x = x_0$. (Insbesondere schreiben wir $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$) Das Taylorpolynom der n-ten Ordnung der Funktion f um die Stelle x_0 ist

$$T^n_{x_o}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Ist f bei x_0 unendlich oft differenzierbar, können wir n gegen unendlich gehen lassen. In diesem Fall spricht man von einer Taylorreihe. Für viele gebräuchliche Funktionen (genauer: für alle analytischen Funktionen) gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

für alle x, für welche die unendliche Summen auf der rechten Seite konvergiert.

Bestimmen Sie für die Funktion

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

die ersten 5 Ableitungen und geben Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ bis zur 5. Ordnung an. Zeichnen Sie die Funktion $\cosh(x)$, das Taylorpolynom 1., 2. und 4. Ordnung in eine Abbildung und berechnen Sie die relative Ungenauigkeit der Näherung an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 10$